Appunti del corso di azzeramento del debito formativo in Analisi Matematica

a cura di E. Caponio, G. Cerami, P. d'Avenia

A. A. 2007/2008

1 Gli insiemi

Riguarderemo le nozioni di insieme e di appartenenza come primitive: un insieme è una raccolta, un aggregato di elementi; un insieme si concepisce in quanto costituito dai suoi elementi che possono essere di natura qualsiasi.

Conoscere un insieme significa saper decidere se un qualunque elemento appartiene o no all'insieme.

Si tenga presente che un elemento di un insieme può essere a sua volta un insieme.

Se x è un elemento dell'insieme I (cioè se x appartiene ad I) si scrive

$$x \in I.$$

Se x invece non è un elemento di I (cioè non appartiene ad I) si scrive

$$x \notin I.$$

Delle due relazioni può essere vera una sola.

Se J è un insieme i cui elementi appartengono ad un insieme I, si dice che J è *incluso* o *contenuto* in I o anche si dice che J è un *sottoinsieme* di I e si scrive

$$J \subset I \qquad \text{ossia} \qquad x \in J \Rightarrow x \in I,$$

(il simbolo $\Rightarrow$ si legge "implica" o "allora").

Ad esempio se è I l'insieme delle parole della lingua italiana, la parola *casa* appartiene ad I mentre *home* non appartiene ad I. Se J è l'insieme dei sostantivi della lingua italiana, allora $J \subset I$.

Se $J \subset I$ e $I \subset J$ allora si dice che i due insiemi sono *uguali* e si scrive

$$J = I,$$

ciò significa che ogni elemento di I appartiene a J e viceversa; quindi i due insiemi sono costituiti dagli stessi elementi.

J si dice *sottoinsieme proprio* di I se

$$J \subset I \qquad \text{e} \qquad J \neq I,$$

cioè se esiste almeno un elemento di I che non appartiene a J.

La relazione di uguaglianza tra insiemi è *riflessiva* (ogni insieme è uguale a se stesso), *simmetrica* (se $I = J$ allora $J = I$), *transitiva* (se $I = J$ e $J = E$ allora $I = E$).

Introduciamo inoltre la nozione di *insieme vuoto*, cioè di un insieme privo di elementi, che indicheremo con $\emptyset$ (per ogni x, $x \notin \emptyset$). Poiché ogni insieme è determinato dai suoi elementi, ammetteremo che esista un solo insieme vuoto e che per ogni insieme I si abbia $\emptyset \subset I$.

Esistono insiemi finiti ed insiemi infiniti.

Per definire un insieme finito basta elencare i suoi elementi, ad esempio:

$$\begin{aligned}&\{\bigstar, \backepsilon, \emptyset, \sharp, ⓢ\},\\ &\{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\},\\ &\{2, 4, 5\}.\end{aligned}$$

Per indicare gli insiemi infiniti (cioè con un numero infinito di elementi) la questione è più complessa. Tra gli insiemi infiniti conosciamo ad esempio l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

che possiamo indicare anche così:

$$\mathbb{N} = \{x : x \text{ è un numero naturale}\},$$

cioè con una proprietà che definisce l'insieme (il simbolo : si legge "tale che"; al suo posto si può anche usare il simbolo $|$). Ancora, ad esempio, possiamo considerare gli insiemi infiniti:

$$\begin{aligned}I &= \{x : x = n^2, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\},\\ P &= \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}.\end{aligned}$$

Dati più insiemi, possiamo costruire altri insiemi a partire da essi.

Se A e B sono due insiemi qualsiasi e $A \subset B$, chiameremo *complementare di A rispetto a B*, l'insieme costituito dagli elementi di B che non appartengono a A e lo indicheremo con il simbolo $\complement_B A$ oppure con $B \setminus A$. Ad esempio se B è l'insieme degli studenti iscritti al Politecnico di Bari e A è quello degli studenti iscritti a corsi di laurea delle facoltà di ingegneria dello stesso Politecnico allora $\complement_B A$ è l'insieme degli studenti iscritti a corsi di laurea della facoltà di architettura. Osserviamo infine che se A è vuoto il complementare di A rispetto a B è tutto B e che se $A = B$ allora $\complement_B A = \emptyset$.

Se A e B sono due insiemi qualsiasi, indicheremo con $A \cup B$ l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B e lo chiameremo *unione* di A e B. Notiamo che $A \cup A = A$ e $A \cup \emptyset = A$.

L'*intersezione* di due insiemi A e B, che indicheremo con $A \cap B$ è l'insieme i cui elementi appartengono sia ad A che a B. Esso è l'insieme vuoto se e solo se A e B non hanno elementi in comune. In tal caso A e B si dicono *disgiunti.*

Se $A \subset B$, allora $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$. Notiamo anche che $A \cap A = A$ ed $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Le operazioni di unione e intersezione possono essere eseguite anche su più di due insiemi (non è neanche necessario che gli insiemi coinvolti siano in numero finito).

Alcuni esempi: sia $M = \{x : x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$ e $J = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$. Allora $J \cap M = \{1\}$ e $J \cup M = \{3, -1, 1\}$. Sia ora $D = \{x : 2n + 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Abbiamo $J \cap D = \{1, 3\}$, $J \cup D = D$. Si noti che $J \subset D$. Inoltre abbiamo $M \cap D = \{1\}$ e $M \cup D = \{-1, 1, 3, 5, \ldots\}$.

Siano A e B due insiemi non vuoti. Si dice *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con il simbolo $A \times B$, l'insieme i cui elementi sono le *coppie ordinate* (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$.

Non bisogna confondere la coppia ordinata (x, y) con l'insieme $\{x, y\}$. Infatti $\{x, y\} = \{y, x\}$ dato che i due insiemi hanno gli stessi due elementi, cioè x e y. Il simbolo (x, y) denota invece un elemento del prodotto cartesiano $A \times B$ ed è diverso sia dall'insieme $\{x, y\}$ che dalla coppia (y, x), che è un elemento di $B \times A$.

2 Le funzioni

Dati due insiemi A e B, si dice *funzione* o *applicazione* o *mappa dell'insieme A nell'insieme B* una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere un solo elemento di B. Se indichiamo con f tale applicazione, scriveremo

$$f \colon A \to B \qquad \text{oppure} \qquad x \in A \longmapsto f(x) \in B.$$

L'insieme A si chiama *dominio* o *insieme di definizione* o ancora *insieme di partenza* della funzione f. L'insieme B si chiama *codominio* o *insieme di arrivo* di f.

Abbiamo detto che ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde mediante f un unico elemento $y \in B$. Tale elemento, univocamente determinato, viene indicato con il simbolo $f(x)$ e si chiama *valore di f in x* oppure *immagine di x mediante f*.

Il sottoinsieme di B i cui elementi sono tutte le immagini mediante f degli elementi di A si chiama *immagine della funzione* f e si indica con $f(A)$. Dunque $f(A) \subset B$. Se $f(A) = B$, allora si dice che la funzione è *surgettiva* o *suriettiva* o anche che f è una applicazione di A *su* B.

Si chiama *grafico* dell'applicazione $f \colon A \to B$ il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito dalle coppie

$$\{(x, y) \in A \times B \colon x \in A,\ y = f(x)\}.$$

Vediamo ora alcuni importanti esempi di applicazioni.

Sia $A \subset B$. L'applicazione f che ad ogni elemento $x \in A$ fa corrispondere x stesso (pensato come elemento di B), si chiama *immersione* di A in B.

In particolare se $A = B$ si chiama *applicazione identica* o *identità di A* e si indica con i_A. Dunque

$$i_A \colon A \to A \qquad i_A(x) = x, \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Siano ora A e B insiemi e consideriamo l'applicazione che ad ogni elemento $x \in A$ fa corrispondere sempre lo stesso elemento $b \in B$. Tale applicazione si dice *applicazione costante di costante valore b.*

Un'applicazione $f\colon A \to B$, si dice *iniettiva* o *ingettiva* se dati $a_1,\ a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ si ha che $f(a_1) \neq f(a_2)$:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

o equivalentemente

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Dunque ogni $y \in B$ o non è immagine di alcun $x \in A$ o è immagine di un solo $x \in A$. Ad esempio, un'immersione è iniettiva, (ma non è suriettiva se $A \neq B$). L'identità è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione costante non è iniettiva ed è suriettiva se e solo se B è costituito da un solo elemento.

Sia J un sottoinsieme di B, chiameremo *immagine inversa di J mediante f* il sottoinsieme di A

$$f^{-1}(J) = \{x \in A\colon f(x) \in J\}.$$

Si noti che $f^{-1}(J)$ può essere vuoto. Ciò avviene quando

$$f(A) \cap J = \emptyset.$$

Come già detto sopra, se un'applicazione è iniettiva allora

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \text{un solo punto} & \text{se } y \in f(A) \\ \emptyset & \text{se } y \notin f(A) \end{cases}$$

Se un'applicazione è surgettiva allora $f^{-1}(J) \neq \emptyset$, qualunque sia $J \subset B$.

Un'applicazione f da A in B che sia ingettiva e surgettiva è *bigettiva*; si dice anche che essa è una *bigezione* o una *corrispondenza biunivoca.*

Illustriamo i concetti qui esposti con qualche esempio.

Sia A l'insieme degli studenti iscritti al Politecnico di Bari e B l'insieme dei numeri naturali. L'applicazione da A in B che ad ogni studente associa il suo numero di matricola è iniettiva ma non suriettiva (non ogni numero naturale è la matricola di uno studente).

Sia ancora A l'insieme degli studenti iscritti al Politecnico di Bari e B l'insieme dei corsi di laurea del Politecnico. L'applicazione da A in B che ad ogni studente associa il corso di laurea a cui egli è iscritto è surgettiva ma non ingettiva (ogni corso di laurea ha più di uno studente).

Sia A l'insieme degli utenti di pc che usano un sistema operativo Microsoft e B l'insieme degli utenti di pc; possiamo considerare l'immersione $j\colon A \to B$ che associa ad ogni utente se stesso.

L'applicazione che ad ogni persona associa il suo nome non è iniettiva: persone diverse possono avere nomi uguali.

Sia C una circonferenza e r una retta nel piano. L'applicazione f che ad ogni punto della circonferenza associa la sua proiezione ortogonale sulla retta non è iniettiva, nè suriettiva. Infatti $f(C)$ è un segmento: $f(C) \subset r$, $f(C) \neq r$ e ci

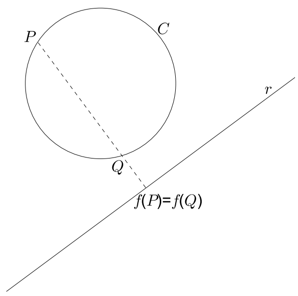

Figura 1: $f\colon C \to r$

sono punti della retta che sono immagini di due punti distinti della circonferenza (v. figura 1).

Siano ora r ed r' due rette nel piano non perpendicolari. L'applicazione che ad ogni punto di r' associa la sua proiezione ortogonale su r è sia iniettiva che suriettiva.

Se invece r è perpendicolare ad r', la precedente applicazione è costante e quindi non è nè suriettiva nè iniettiva.

Vediamo ora qualche modo importante per costruire nuove applicazioni a partire da alcune assegnate che soddisfino certe proprietà.

Se un'applicazione f da A in B è iniettiva, sappiamo che per ogni $y \in f(A)$ esiste uno ed un solo $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Possiamo quindi definire (dato che non vi è ambiguità nella scelta di x) la nuova applicazione da $f(A)$ su A che ad $y \in f(A)$ associa $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Tale applicazione si chiama *inversa di* f e si indica con f^{-1}. Ad esempio, l'applicazione che associa ad ogni punto di una semicirconferenza S la sua proiezione ortogonale sul diametro d che intercetta la semicirconferenza stessa, è ingettiva e surgettiva da S a d. La sua inversa è l'applicazione che ad ogni punto del diametro associa l'intersezione tra la perpendicolare a d passante per quel punto e la semicirconferenza.

Date due applicazioni $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to D$, se $f(A) \subset C$ possiamo considerare la nuova applicazione che ad $x \in A$ associa $g(f(x)) \in D$, cioè il valore che g assume in $f(x)$. Tale applicazione si chiama *composta di* f *e* g e si indica $g \circ f$. Dunque

$$g \circ f\colon A \to D, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ad esempio, sia A l'insieme delle parole della lingua italiana e si considerino l'applicazione $f\colon A \to \mathbb{N}$ che ad ogni parola associa il numero di lettere che la compongono e $g\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ cha associa 0 ai numeri pari e 1 ai numeri dispari. Allora $g \circ f$ è l'applicazione che ad ogni parola della lingua italiana associa 0 se è costituita da un numero pari di lettere e 1 se è costituita da un numero dispari di lettere.

Se $f\colon A \to B$ è iniettiva allora possiamo comporre f con la sua inversa e abbiamo

$$f^{-1} \circ f \colon A \to A \qquad f^{-1} \circ f = i_A,$$

infatti per ogni $x \in A$, $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, per la definizione data sopra di f^{-1}, inoltre

$$f \circ f^{-1} \colon f(A) \to B \qquad f \circ f^{-1} = \text{immersione di } f(A) \text{ in } B,$$

dunque per ogni $x \in f(A)$, $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$. Se f è bifettiva, dato che in questo caso $f(A) = B$, si ha

$$f^{-1} \circ f = i_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = i_B.$$

3 L'insieme dei numeri reali

Il metodo comunemente usato in matematica consiste nel precisare senza ambiguità i presupposti da cui si parte (*postulati* o *assiomi*) e nel dedurre in modo coerente (mediante *dimostrazioni*) proprietà e informazioni che generalmente non appaiono evidenti anche quando si sono ben compresi gli assiomi di partenza. Queste deduzioni (non banali) si chiamano *teoremi*. Sinonimi di teorema sono *proposizione*, *lemma* (viene usato in genere per indicare un passaggio intermedio, un piccolo risultato di avvicinamento al teorema principale) e *corollario* (si chiamano così, in genere, le conseguenze di un teorema ritenuto più importante).

Il nostro punto di partenza è quello di assumere come postulato l'esistenza dei numeri reali. Assumiamo cioè che esista un insieme di numeri, che chiameremo *reali* e che indicheremo con $\mathbb{R}$, su cui sono definite due *operazioni* che godono di determinate proprietà.

Una operazione $*$ su un insieme A è una applicazione che ad ogni coppia ordinata di elementi di A fa corrispondere un elemento di A, dunque

$$* \colon A \times A \to A.$$

In genere il valore che $*$ assume nella coppia (x, y) viene indicato con $x * y$.

Noi assumeremo che su $\mathbb{R}$ siano definite due operazioni, *l'addizione* e la *moltiplicazione*, che indicheremo rispettivamente con i simboli usuali $+$ e $\cdot$ (quasi sempre il simbolo di moltiplicazione verrà omesso, così scriveremo ab invece che $a \cdot b$).

Gli assiomi dei numeri reali

Le proprietà di cui godono, per assioma, queste operazioni sono le seguenti: siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, abbiamo

1. **proprietà associativa**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc);$$

2. **proprietà commutativa**

$$a + b = b + a \qquad ab = ba;$$

3. **proprietà distributiva**

$$a(b + c) = ab + ac;$$

4. **esistenza degli elementi neutri**

   - esiste in $\mathbb{R}$ un elemento detto *zero* e indicato con il simbolo 0 tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $a + 0 = a$;
   - esiste in $\mathbb{R}$ un elemento, diverso da 0, detto *unità* e indicato con il simbolo 1 tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $a \cdot 1 = a$;

5. **esistenza dell'opposto di ogni numero reale**

   per ogni numero reale a esiste un numero reale detto *opposto* di a e indicato con il simbolo $-a$ tale che

$$a + (-a) = 0;$$

6. **esistenza del reciproco (o inverso)**

   per ogni numero reale a diverso da 0 esiste un numero reale detto *reciproco* o *inverso* di a e indicato con il simbolo a^{-1} tale che

$$aa^{-1} = 1.$$

Assumeremo anche che su $\mathbb{R}$ sia definita una *relazione di ordinamento*, che si chiama *minore o uguale* e si indica con il simbolo $\leq$. Le proprietà che $\leq$ soddisfa sono le seguenti: siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora abbiamo

7. **è sempre possibile mettere in relazione d'ordine due numeri reali**

$$a \leq b \quad \text{oppure} \quad b \leq a;$$

8. **proprietà antisimmetrica**

$$a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \qquad \Rightarrow \qquad a = b;$$

9. **compatibilità con l'addizione**

$$a \leq b \qquad \Rightarrow \qquad a + c \leq b + c;$$

10. **compatibilità con la moltiplicazione**

$$a \leq b \quad \text{e} \quad 0 \leq c \qquad \Rightarrow \qquad ac \leq bc;$$

11. **assioma di completezza**

    se A e B sono due insiemi non vuoti di numeri reali *separati* cioè tali che per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si abbia $a \leq b$, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ che *separa* A *e* B cioè tale che comunque si scelgano $a \in A$ e $b \in B$ si abbia: $a \leq c \leq b$.

Sul piano delle notazioni e delle convenzioni occorre notare che:

- scrivendo $a < b$ si intende $a \leq b$ e $a \neq b$, mentre $a \geq b$ vuol dire che $b \leq a$ e $a > b$ sta per $b < a$. Si verifica allora che per ogni $a,\ b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni

  $$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

  In particolare quindi per ogni numero reale deve essere $a < 0$ o $a = 0$ oppure $0 < a$. I numeri reali a tali che $a < 0$ si dicono *negativi*, quelli per cui $0 < a$ si dicono *positivi*; indicheremo infine con $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei numeri *non negativi*, cioè $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$;

- la *sottrazione* di due numeri reali $a - b$ è definita come l'addizione di a con l'opposto di b: $a - b = a + (-b)$;

- la *divisione* di due numeri reali $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, è definita come la moltiplicazione di a per il reciproco di b: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$; inoltre se $a \neq 0$, con il simbolo $\frac{1}{a}$ si denota il reciproco di a.

Indichiamo di seguito alcune importanti relazioni relative ai numeri reali che si ricavano come conseguenze degli assiomi:

a. **unicità dello zero e dell'unità**

   supponiamo che esistano 0 e $0'$ entrambi elementi neutri per l'addizione. Allora per definizione di elemento neutro si ha:

   $$0 = 0 + 0' = 0',$$

   cioè i due elementi neutri sono uguali.

   Analogamente si prova l'unicità dell'unità;

b. **unicità dell'opposto di un numero reale**

   sia $a \in A$ e supponiamo che esista un'altro opposto b del numero a, cioè supponiamo che $a + b = 0$. Allora

   $$b = b + 0 = b + a + (-a) = 0 + (-a) = -a.$$

   Analogamente si dimostra l'unicità del reciproco di un numero reale non uguale a 0;

c. **l'opposto di $-\mathbf{a}$ è a**

$$-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

poiché $(-a) + a = 0$, per la b, l'opposto di $-a$, cioè $-(-a)$ deve essere a;

d. **per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$**

infatti $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$ e quindi sommando ad ambo i membri l'opposto di $a0$ otteniamo $0 = a0$.

Rimarchiamo che questa relazione è strettamente connessa al fatto che si postula l'esistenza del reciproco solo per numeri diversi da 0, infatti nessun numero moltiplicato per 0 può dare come risultato l'unità;

e. **legge di annullamento del prodotto**

$$\textbf{se } ab = 0 \textbf{ allora è } a = 0 \textbf{ oppure } b = 0$$

infatti se $a \neq 0$, esiste il reciproco a^{-1} di a e dunque

$$b = 1b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$$

per la d.

f. $-(\mathbf{ab}) = (-\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(-\mathbf{b})$

infatti

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0,$$

analogamente si prova che anche $a(-b)$ è l'opposto di $-(ab)$;

g. **la relazione d'ordine è transitiva** cioè

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} \leq \mathbf{c} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} \leq \mathbf{c}$$

infatti se $a \leq b$, allora $0 = a + (-a) \leq b + (-a)$ e se $b \leq c$ allora $0 = b + (-b) \leq c + (-b)$. Quindi per l'assioma 9 abbiamo $0 = 0 + 0 \leq b + (-a) + c + (-b) = c + (-a)$, da cui $a \leq c + (-a) + a = c + 0 = c$;

h. **se $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{0} \leq -\mathbf{a}$** infatti

$$0 = a + (-a) \leq 0 + (-a) = -a;$$

i. **se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ allora $-\mathbf{a} \geq -\mathbf{b}$**

infatti se $a \leq b$ allora $0 = a - a \leq b - a$ e dunque da h, c e la proprietà distributiva $a - b \leq 0$, da cui $-b \leq -a$. Si può dimostrare allo stesso modo anche l'analoga relazione con il segno di $<$;

j. 0 **è minore o uguale del quadrato di ogni numero reale**

per ogni $a \in \mathbb{R}$, indicheremo $a \cdot a$ con il simbolo a^2. Se $0 \leq a$ allora, per l'assioma 10 e la conseguenza d, si ha

$$0 = 0a \leq aa = a^2;$$

se $a \leq 0$ allora per la conseguenza h, $0 \leq -a$ e quindi per la f, $0 \leq (-a)(-a) = -(a(-a)) = -(-(aa)) = aa = a^2$.

In particolare abbiamo che $0 \leq 1 \cdot 1 = 1$, ed essendo $0 \neq 1$ si ha che $0 < 1$;

k. **se $\mathbf{a > 0}$ allora $\mathbf{a^{-1} > 0}$**

infatti se per assurdo supponiamo che $a^{-1} < 0$ allora $1 = a^{-1}a < 0a = 0$, in contraddizione con $0 < 1$;

l. **se $\mathbf{0 < a < b}$ allora $\mathbf{a^{-1} > b^{-1}}$**

infatti dalla k, $a^{-1} > 0$ e dunque $1 = aa^{-1} < ba^{-1}$ da cui $b^{-1} = b^{-1}1 < b^{-1}ba^{-1} = a^{-1}$.

Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Il simbolo (a, b) (o anche $]a, b[$) denota il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\},$$

che si chiama *intervallo aperto di estremi a e b.*

Analogamente si pone

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$$

intervallo chiuso a sinistra aperto a destra di estremi a e b;

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$$

intervallo aperto a sinistra chiuso a destra di estremi a e b;

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$$

intervallo chiuso di estremi a e b.

L'insieme dei numeri reali può essere posto in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta nel modo seguente. Considerata una retta qualsiasi, fissiamo su di essa un *sistema di riferimento cartesiano* cioè fissiamo un punto, che viene chiamato *origine*, in genere indicato con O, un verso di percorrenza positivo e un altro punto A, in modo che segua O nel verso fissato. Il segmento OA è l'unita di misura rispetto alla quale misurare le lunghezze di ogni altro segmento sulla retta.

A 0 associamo O. A $x > 0$ associamo il punto P in modo che P segua O nel verso fissato e la misura del segmento OP sia uguale a x. A $x < 0$ associamo P in modo che P preceda O e la misura di OP sia uguale a $-x$.

Una volta stabilita questa corrispondenza biunivoca abbiamo che un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ corrisponde ad un segmento della retta privato dei suoi estremi, un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra ad un segmento con estremo sinistro incluso e estremo destro escluso, e così via.

All'insieme dei numeri reali aggiungiamo due simboli $-\infty$ e $+\infty$ e, per convenzione, poniamo $x < +\infty$ e $x > -\infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'insieme dei reali con l'aggiunta di questi due simboli si chiama *retta ampliata* e si indica con il simbolo $\overline{\mathbb{R}}$. I simboli $-\infty$ e $+\infty$ sono utili per rappresentare come intervalli di numeri reali le semirette:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < a\}$$

intervallo aperto illimitato inferiormente di estremo a;

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq a\}$$

intervallo chiuso illimitato inferiormente di estremo a;

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}$$

intervallo aperto illimitato superiormente di estremo a;

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}$$

intervallo chiuso illimitato superiormente di estremo a.

Alcuni esercizi

E1. dimostrare che, dati a e b in $\mathbb{R}$, l'equazione $x + a = b$ ha una ed una sola soluzione data da $x = b - a$; analogamente se $a \neq 0$, l'equazione $xa = b$ ha un'unica soluzione data da $x = \frac{b}{a}$;

E2. 0 è l'unico elemento du $\mathbb{R}$ che ha come opposto se stesso;

E3. se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora $0 \leq ab$;

E4. se $a \leq b$ e $c \leq 0$ allora $ac \geq bc$;

E5. $(-a) + (-b) = -(a + b)$;

E6. $(-a)(-b) = ab$;

E7. se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ allora $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$;

E8. se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ allora
$$a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$
Mostrare con un esempio che la relazione precedente è falsa se a e b non sono maggiori o uguali di 0.

Numeri naturali, interi, razionali

Gli assiomi dei numeri reali sanciscono (tra le altre cose) l'esistenza degli elementi neutri 0 e 1. Quindi appartengono ad $\mathbb{R}$ anche i numeri che si ottengono addizionando l'unità a se stessa: $1+1, 1+1+1, 1+1+1+...+1$. Tali numeri si dicono *numeri naturali* e il loro insieme, con l'aggiunta di 0, si indica con $\mathbb{N}$. Si chiama *insieme dei numeri interi* e si indica con $\mathbb{Z}$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dai numeri naturali e dai loro opposti. Il risultato della divisione di due numeri interi $\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, si dice *numero razionale*. L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$.

Abbiamo quindi la seguente catena di inclusioni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Poiché gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, su di essi sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione di $\mathbb{R}$, però non sono soddisfatti tutti gli assiomi dei reali. Ad esempio nell'ambito dei numeri naturali non esiste l'opposto di alcun numero. Tutti i numeri interi, escluso 1, hanno per reciproco un numero reale che non è intero. L'insieme dei numeri razionali soddisfa tutti gli assiomi dei reali tranne l'assioma di completezza. Per verificare questo consideriamo gli insiemi $A = \{a \in \mathbb{Q} \colon a > 0 \text{ e } a^2 \leq 2\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} \colon b > 0 \text{ e } b^2 \geq 2\}$. Per la proprietà transitiva e per E8 allora ogni $a \in A$ è minore o uguale di ogni $b \in B$ e per l'assioma di completezza esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$. Si può dimostrare che tale numero è unico e che $c^2 = 2$. Proviamo che c non è razionale. Supponiamo per assurdo che c sia razionale. Allora esistono $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, che possiamo supporre *primi fra loro*, cioè senza divisori comuni, tali che $c = \frac{m}{n}$. Dunque $c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$, da cui $m^2 = 2n^2$. Essendo $2n^2$ pari anche m^2 è pari e quindi anche m è pari.[1] Dunque esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $m = 2k$, pertanto $4k^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2k^2$ e quindi anche n è pari, in contraddizione con l'ipotesi che m e n non hanno divisori comuni.

L'insieme dei razionali è denso in $\mathbb{R}$

Come abbiamo visto, l'insieme dei numeri razionali non soddisfa l'assioma di completezza. Però esso gode dell'importante proprietà di essere *denso in* $\mathbb{R}$ cioè:

$$\text{per ogni } a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \text{ esiste } q \in Q \text{ tale che } a < q < b.$$

o in altri termini ogni numero reale può essere approssimato con la precisione voluta da un numero razionale. Si pensi alla rappresentazione decimale di un numero reale. Se il numero in questione non è razionale (si dice quindi che è *irrazionale*), la sua rappresentazione decimale è un allineamento infinito *aperiodico* di cifre decimali.[2] Una qualsiasi approssimazione del numero in questione con un numero razionale è data da un troncamento di tale rappresentazione ad

[1] Osserviamo che se m fosse dispari allora anche il suo quadrato sarebbe dispari, infatti se m è dispari esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $m = 2k + 1$ e quindi $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$, che è un numero dispari.

[2] si ricordi che un numero razionale ha una rappresentazione decimale che può avere o un numero finito di cifre o un numero infinito di cifre; in quest'ultimo caso la rappresentazione è *periodica*, cioè una cifra o un gruppo di cifre si ripete infinite volte.

un numero finito di cifre. Ad esempio

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373 \qquad \pi \approx 3,14159265359$$

Vale la pena sottolineare che $\sqrt{2}$ non è uguale a $1,414213562373$ nè ad un qualsiasi altra sua approssimazione decimale (così come π non è $3,14$!).

Equazioni e disequazioni

Una *equazione* nell'incognita x è una espressione del tipo

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dove f è una funzione definita in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Risolvere (1) significa determinare le x in A per cui f assume valore 0.

Una *disequazione* nell'incognita x è un'espressione del tipo

$$f(x) > 0 \quad \text{o anche } f(x) \geq 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \leq 0. \tag{2}$$

Risolvere (2) significa determinare le x in A per cui f assume valori maggiori di 0, maggiori o uguali a 0, ecc..

Valore assoluto di un numero reale

Sia $a \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Il numero $|a|$ si chiama *valore assoluto* o *modulo* del numero reale a. Anche la funzione

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto |x| \in \mathbb{R}$$

si chiama valore assoluto. Essa non è surgettiva, dato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|x| \geq 0$. Se la pensiamo come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+$, diviene ovviamente surgettiva. Non è ingettiva dato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|x| = |-x|$.

Una rappresentazione cartesiana del suo grafico[3] è in figura 2.

La funzione, definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che ad x associa $\frac{x}{|x|}$ si chiama funzione *segno*. Essa assume valore 1 se $x > 0$, valore -1 se $x < 0$.

Elenchiamo alcune importanti proprietà del valore assoluto:

[3]Vogliamo accennare brevemente al modo di effettuare la rappresentazione cartesiana del grafico di una funzione. Consideriamo due rette perpendicolari che si intersecano in un punto O, che chiamiamo *origine degli assi*. Fissiamo su ciascuna delle due rette un sistema di riferimento cartesiano avente per origine l'origine degli assi. Chiamiamo *asse delle ascisse* o *asse delle x* una delle due rette e *asse delle ordinate* o *asse delle y* l'altra. Se consideriamo un punto P del piano e tracciamo le parallele agli assi passanti per esso, queste intersecano gli assi in due punti A e B ai quali corrispondono i numeri reali (x, y), che si chiamano *coordinate cartesiane* del punto P, e che sono i numeri corrispondenti, rispettivamente, ai punti A e B nei sistemi di riferimento fissati sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate. Se consideriamo ora il grafico di una funzione f, ad ogni suo elemento $(x, f(x))$ associamo il punto del piano di coordinate $(x, f(x))$. L'insieme di tali punti fornisce la rappresentazione cartesiana del grafico di f.

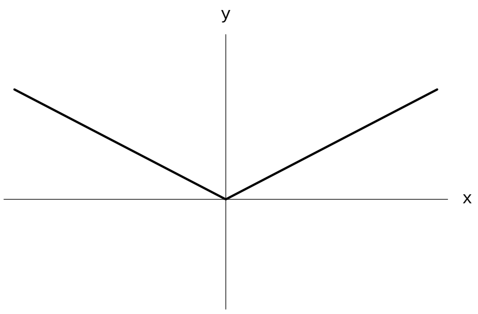

Figura 2: $y = |x|$

1. **sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+$ allora**

$$|\mathbf{x}| \leq \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{a}; \tag{3}$$

   infatti se $x \geq 0$ allora $x \geq -a$ e, dato che $x = |x|$, $x \leq a$ equivale a $|x| \leq a$; se $x < 0$ allora $x \leq a$ e $-x = |x| \leq a$ equivale a $x \geq -a$;

2. **per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ si ha**

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad \mathbf{e} \qquad |\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|;$$

   poiché risulta

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad \text{e} \qquad -|b| \leq b \leq |b|$$

   sommando membro a membro le due precedenti relazioni otteniamo

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

   e quindi dalla (3) si ha $|a + b| \leq |a| + |b|$; la seconda relazione segue facilmente dalla conseguenza f degli assiomi;

3. $\big||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\big| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$; infatti

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

   da cui $|a| - |b| \leq |a - b|$. Analogamente

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|,$$

   da cui $-|a - b| = -|b - a| \leq |a| - |b|$. Mettendo insieme quanto ottenuto abbiamo

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$$

   e dalla (3), la tesi.

Alcuni esercizi

E9. Risolvere l'equazione
$$|2 - x| = 1.$$
Perché l'equazione sia soddisfatta, l'argomento del valore assoluto, cioè $2 - x$, deve essere uguale a 1 oppure a -1. Nel primo caso otteniamo $2 - x = 1$ da cui $x = 1$, nel secondo $2 - x = -1$ da cui $x = 3$.

E10. Risolvere l'equazione
$$|2 - x| = -1.$$
Dato che il valore assoluto di un numero è maggiore uguale di 0, l'equazione non ha soluzioni.

E11. Risolvere la disequazione
$$|3x - 1| - 3 \geq -1.$$
Chiaramente la disequazione assegnata è equivalente a $|3x - 1| \geq 2$. Osserviamo che dalla (3), $|3x - 1| < 2$ se e solo se $-2 < 3x - 1 < 2$, quindi $|3x - 1| \geq 2$ se e solo se $3x - 1 \geq 2$ oppure $3x - 1 \leq -2$. Dalla prima disequazione otteniamo $x \geq 1$, dalla seconda $x \leq -\frac{1}{3}$. Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty)$.

E12. Risolvere la disequazione
$$|x| - |x - 1| + |x - 3| < 5.$$

4 Funzioni lineari e funzioni affini

Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto ax \in \mathbb{R},$$
si chiama *funzione lineare in* $\mathbb{R}$.

Osserviamo che se $a = 0$ otteniamo la funzione costante di costante valore 0, se $a = 1$ otteniamo la funzione identità di $\mathbb{R}$.

Osserviamo inoltre che una funzione lineare assume in 0 il valore 0

Il grafico di tale funzione è rappresentato da una retta passante per l'origine: nelle figure 3, 4, 5 e 6 ne riportiamo una rappresentazione cartesiana a seconda che sia rispettivamente $0 < a < 1,\ 1 < a,\ -1 < a < 0,\ a < -1$.

Siano ora $a, b \in \mathbb{R}$. La funzione
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto ax + b \in \mathbb{R},$$
si chiama *funzione affine in* $\mathbb{R}$.

Osserviamo che se $b = 0$ otteniamo una funzione lineare e che se $a = 0$ otteniamo la funzione costante di costante valore b definita in $\mathbb{R}$.

Osserviamo inoltre che una funzione affine assume in 0 il valore b.

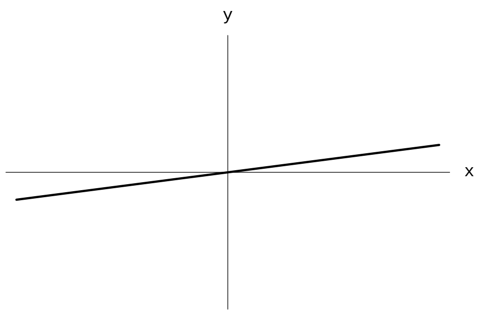

Figura 3: $y = ax$ con $0 < a < 1$

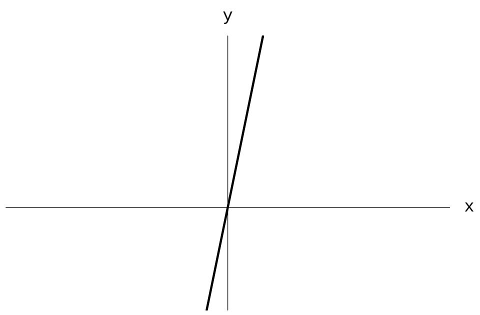

Figura 4: $y = ax$ con $a > 1$

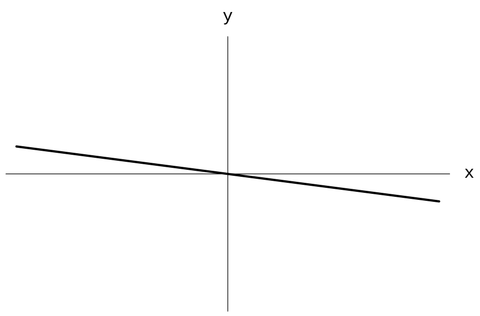

Figura 5: $y = ax$ con $-1 < a < 0$

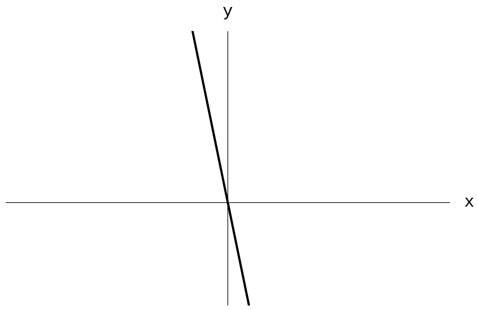

Figura 6: $y = ax$ con $a < -1$

Il grafico di tale funzione (v. figura 7) è rappresentato da una retta passante per il punto $(0, b)$ parallela alla retta rappresentante il grafico della funzione lineare $x \mapsto ax$. Si dice anche che tale retta è *la retta di equazione* $y = ax + b$: si intende così che si tratta dell'insieme r dei punti del piano aventi coordinate $(x, ax + b)$:

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = ax + b\}.$$

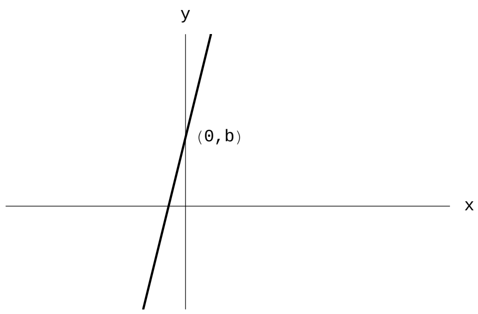

Figura 7: $y = ax + b$

Esercizio

E13. Dimostrare che se $a \neq 0$ la funzione affine $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$ è bigettiva. Determinare la sua funzione inversa.

5 Potenze e radici n-esime

Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si chiama *potenza n-esima di base* $a \in \mathbb{R}$ e si indica con a^n il numero reale

$$1 \text{ se } n = 0 \text{ e } a \neq 0, \qquad \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \text{ se } n > 0.$$

Il numero n si chiama *esponente della potenza.* Osserviamo che $0^n = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mentre al simbolo 0^0 non si attribuisce alcun significato.

In base alla definizione sono di facile verifica le seguenti proprietà: siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$ allora

- $a^m a^n = a^{m+n}$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$;
- $(ab)^m = a^m b^m$.

Osserviamo che se n è pari,

a. $a^n \geq 0$ ed è uguale a 0 se e solo se $a = 0$;

b. $a^n = (-a)^n$.

Definiamo ora la potenza con esponente intero negativo. Se $a \in \mathbb{R} \setminus 0$, poniamo

$$a^{-n} :\, = \frac{1}{a^n}.$$

Osserviamo che la definizione appena data è ragionevole se si vuole, come è naturale, che continuino a valere le proprietà su indicate per le potenze con esponente positivo. Ad esempio

$$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1,$$

per cui a^{-n} deve essere il reciproco di a^n.

Consideriamo ora, nell'insieme $\mathbb{R}_+$, l'equazione

$$x^n = a, \tag{4}$$

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \geq 0$. L'esistenza di una soluzione in $\mathbb{R}^+$ per tale equazione è assicurata dal seguente teorema che non dimostreremo:

Teorema 1 (Esistenza ed unicità della radice n-esima) *Sia $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Esiste uno ed un solo numero reale x, $x \geq 0$ soluzione di (4). Tale numero si indica con $a^{\frac{1}{n}}$ oppure con $\sqrt[n]{a}$ e si chiama* radice n-esima di a.

Osserviamo che:

a. se $a > 0$ e n è pari allora l'equazione (4) ha due soluzioni in $\mathbb{R}$ e cioè $a^{1/m} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ e $-a^{1/m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$;

   se $a > 0$ e n è dispari, (4) ha una sola soluzione $a^{1/m}$;

b. se $a = 0$, allora (4) ha una sola soluzione $x = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($\sqrt[n]{0} = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$);

c. se $a < 0$ e n è pari allora (4) non ha alcuna soluzione, dato che la potenza con esponente pari di un numero qualsiasi è maggiore o uguale di 0;

   se $a < 0$ e n è dispari, (4) ha una sola soluzione $-\sqrt[n]{-a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$; tale soluzione si indica ancora con il simbolo $a^{1/n}$ o $\sqrt[n]{a}$.

Dunque non ha senso considerare radici n-esime, con n pari, di un numero negativo.

Possiamo quindi definire la potenza con esponente razionale $\frac{m}{n} \neq 0$ qualsiasi ponendo

$$a^{m/n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

con le necessarie limitazioni su a, se n è pari.

Poiché sappiamo che ogni numero reale può essere approssimato con la precisione voluta da un numero razionale, possiamo farci un'idea di che senso dare alle potenze con esponente reale qualsiasi. Ad esempio possiamo prendere come approssimazione di $2^{\sqrt{2}}$ la potenza con esponente razionale $2^{1,414}$; mentre $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ può essere approssimato ad esempio da $(1,4142)^{1,4}$. Si tenga presente che per i problemi di definizione incontrati già per le radici di indice pari, la potenza con esponente irrazionale qualsiasi è definita solo se la base è non negativa. Indichiamo brevemente il procedimento per definire rigorosamente la potenza a^α con $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (se $a = 0$ abbiamo $0^\alpha = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e se $\alpha = 0$ abbiamo $a^0 = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Se $a = 1$ poniamo $1^\alpha = 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia quindi $a > 0$ e $a \neq 1$ e consideriamo i seguenti due sottinsiemi separati di $\mathbb{Q}$:

$$A = \{q \in Q \colon q < \alpha\} \qquad \text{e} \qquad B = \{q \in Q \colon q \geq \alpha\}.$$

Si può dimostrare che qualunque sia $a > 0$ anche i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$C = \{a^q \colon q \in A\} \qquad \text{e} \qquad D = \{a^q \colon q \in B\}$$

sono separati. Quindi per l'assioma di completezza esiste $c \in \mathbb{R}$ che separa C e D. Tale numero c, che risulta essere unico, è per definizione la potenza a^α.

Alcuni esercizi

E14. Dimostrare che $a^m a^{-n} = a^{m-n}$.

E15. Dimostrare che se n è pari, $a^n \geq 0$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

6 Funzioni potenza

Avendo definito la potenza con esponente naturale di un numero reale qualsiasi, abbiamo a disposizione una legge che fa corrispondere ad un numero reale un unico numero reale.

Possiamo quindi definire la seguente funzione

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n \in \mathbb{R},$$

dove $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, che si chiama *funzione potenza n-esima*.

Osserviamo che per n uguale a 1 abbiamo la funzione identità di $\mathbb{R}$.

La funzione $x \mapsto x^0$ è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è costante di costante valore 1.

Riportiamo nelle figure 8, 9 e 10 il grafico di tale funzione a seconda che n sia pari o dispari.

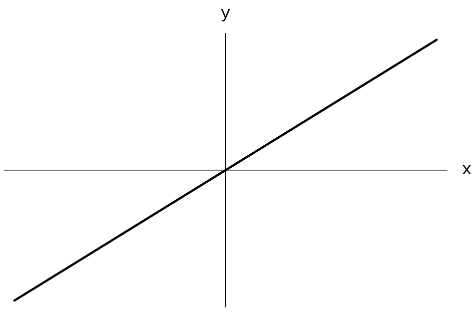

Figura 8: n=1

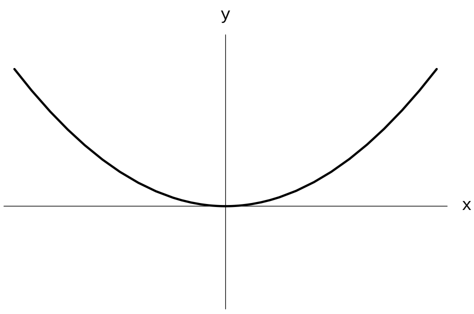

Figura 9: n pari (in particolare qui è disegnato il grafico per $n = 2$; l'andamento del grafico è analogo per tutti gli n pari)

Osserviamo che se n è pari l'immagine della funzione potenza è $\mathbb{R}_+$ (v. Teorema 1 ed E15), se n è dispari è $\mathbb{R}$.

Per quanto visto nella precedente sezione (cf. osservazione a) se n è pari, la funzione potenza non è ingettiva ($x^n = (-x)^n$).

Osserviamo inoltre che se n è dispari la funzione potenza è *strettamente crescente*. Questo vuol dire che

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad (x_1)^n < (x_2)^n.$$

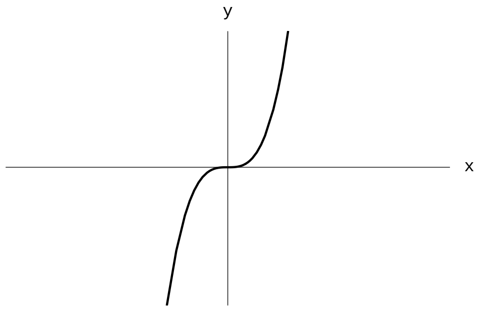

Figura 10: n dispari (in particolare qui è disegnato il grafico per $n = 3$; l'andamento del grafico è analogo per tutti gli n dispari)

Poiché in questo caso tale funzione è anche iniettiva, vale anche l'altra implicazione. Pertanto

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1)^n < (x_2)^n. \tag{5}$$

Vale la pena osservare anche che dalla iniettività della funzione potenza con n dispari, un'equazione del tipo

$$(f(x))^n = a,$$

dove $a \in \mathbb{R}$, è soddisfatta se e solo se $f(x) = a^{1/n}$. Se invece n è pari, abbiamo che se $a < 0$ non ci sono soluzioni, se invece $a \geq 0$ l'equazione è soddisfatta se e solo se $f(x) = a^{1/n}$ oppure $f(x) = -a^{1/n}$.

La relazione (5) consente di affrontare agevolmente la risoluzione di disequazioni del tipo

$$(f(x))^n \gtreqless (g(x))^n\,, \tag{6}$$

con n dispari. Infatti poiché per n dispari la funzione potenza è strettamente crescente, la disequazione (6) è soddisfatta se e solo se le basi al primo e secondo membro soddisfano la disequazione con lo stesso verso cioè

$$f(x) \gtreqless g(x).$$

Consideriamo ora la funzioni potenza con esponente razionale.

Iniziamo da esponenti razionali del tipo $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e distinguiamo il caso n pari da quello n dispari.

Se n è pari abbiamo la funzione

$$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R},$$

il cui grafico è riportato in figura 11

Se n è dispari abbiamo la funzione

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R},$$

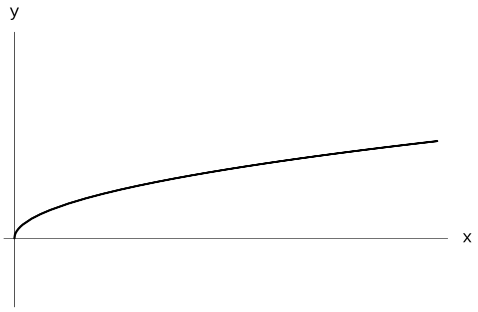

Figura 11: $y = \sqrt[n]{x}$, n pari

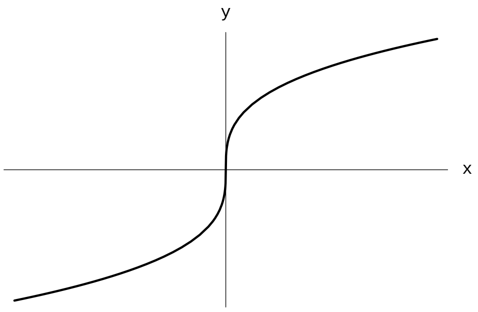

Figura 12: $y = \sqrt[n]{x}$, n dispari

il cui grafico è in figura 12.

Osserviamo che la funzione radice n-esima è in ogni caso ingettiva e strettamente crescente.

Quindi un'equazione del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \tag{7}$$

equivale a $f(x) = g(x)^n$. Pertanto si può risolvere quest'ultima equazione e accertarsi, nel caso n pari, che se x_0 è una soluzione, allora sia anche $f(x_0) \geq 0$ e $g(x_0) \geq 0$, (se $f(x_0) < 0$, x_0 non è soluzione di (7) perché il primo membro non ha significato; se $f(x_0) \geq 0$ ma $g(x_0) < 0$, x_0 non è soluzione di (7) perché il secondo membro è negativo mentre il primo è sicuramente maggiore o uguale di 0).

Consideriamo ora una disequazione del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} \gtreqless g(x). \tag{8}$$

Tale disequazione può essere riscritta come

$$\sqrt[n]{f(x)} \gtreqless \sqrt[n]{(g(x))^n}.$$

Poiché la funzione radice n-esima è strettamente crescente, possiamo passare alla disequazione con lo stesso verso sugli argomenti: è chiaro che se n è dispari non abbiamo problemi di definizione delle funzioni coinvolte e quindi la disequazione (8) è equivalente a

$$f(x) \gtreqless (g(x))^n ;$$

se invece n è pari occorre imporre che sia $f(x)$ che $g(x)$ siano non negativi per dare significato alle radici. Riepilogando:

n pari

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^n \end{cases}$$

n dispari

$$\sqrt[n]{f(x)} \gtreqless g(x) \Leftrightarrow f(x) \gtreqless (g(x))^n$$

Ricordando che $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, e che $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ possiamo introdurre le funzioni

$$x \longmapsto x^{\frac{m}{n}}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{Z},$$

che sono definite

- n pari: su $\mathbb{R}_+$ se m è positivo, su $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ se m è negativo;
- n dispari: su $\mathbb{R}$ se m è positivo, su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se m è negativo;

A titolo di esempio riportiamo il grafico di $y = \frac{1}{x}$ (figura 13) e di $y = \frac{1}{x^2}$ (figura 14), corrispondenti rispettivamente a $n = 1$, $m = -1$ e $n = 1$, $m = -2$.

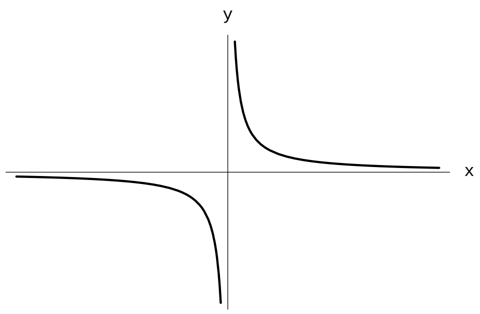

Figura 13: $y = \frac{1}{x}$

Introduciamo, infine, la *funzione potenza con esponente reale qualsiasi.*

Se $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$x \in [0, +\infty) \longmapsto x^{\alpha} \in \mathbb{R},$$

il cui grafico è riportato nelle figure 15 e 16;

se $\alpha \in (-\infty, 0)$:

$$x \in (0, +\infty) \longmapsto x^{\alpha} \in \mathbb{R},$$

il cui grafico è riportato in figura 17.

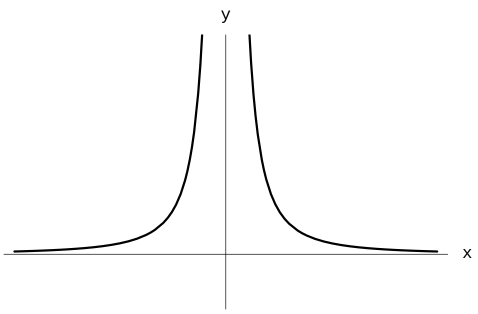

Figura 14: $y = \frac{1}{x^2}$

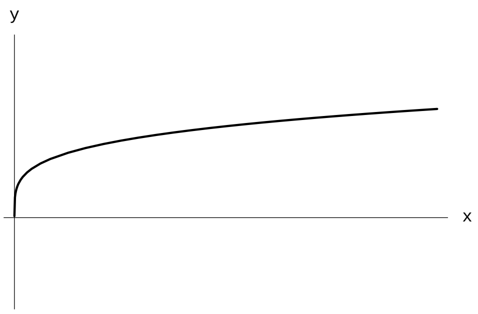

Figura 15: $y = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$

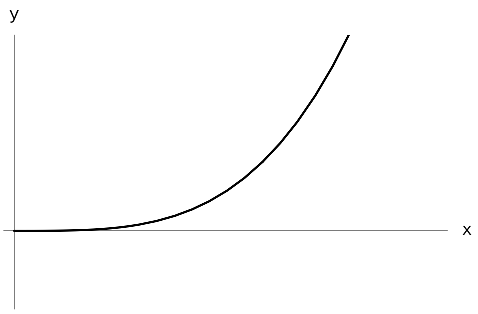

Figura 16: $y = x^\alpha$, con $\alpha > 1$

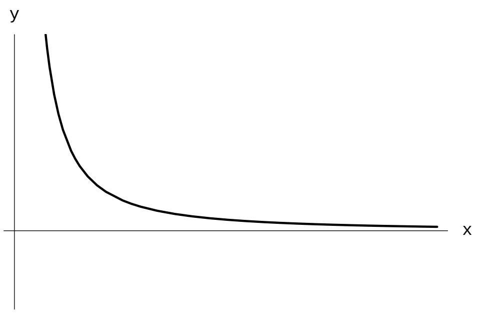

Figura 17: $y = x^\alpha$, con $\alpha < 0$

Alcuni esercizi

E16. Risolvere
$$(2 - 3x)^9 = -11.$$
Equivale a $2 - 3x = \sqrt[9]{-11}$, da cui $x = \frac{2+\sqrt[9]{11}}{3}$.

E17. Risolvere
$$(1 - x)^4 = 16.$$
Equivale a $1 - x = 2$ o $1 - x = -2$, da cui $x = -1$ e $x = 3$.

E18. Risolvere
$$(1 - x)^4 = -1.$$
Non ci sono soluzioni, visto che il secondo membro è negativo.

E19. Risolvere la disequazione
$$(2x - 3)^5 < (1 - x)^5.$$
Equivale a
$$2x - 3 < 1 - x,$$
da cui $x < \frac{4}{3}$.

E20. Perché non possiamo risolvere con il ragionamento precedente la disequazione
$$(2x - 3)^4 < (1 - x)^4?$$

E21. Risolvere

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x-1} \geq 2,\\
&\sqrt{3x-1} < -2,\\
&\sqrt[3]{3x-1} < -2,\\
&\sqrt[5]{3x-1} < \sqrt{2}\,\sqrt[5]{1-x},\\
&\sqrt[4]{\frac{x}{2}+1} \geq \sqrt[4]{1-x},
\end{aligned}$$

7 Polinomi e loro fattorizzazione

Si chiama *polinomio in una variabile a coefficienti reali* ogni funzione p del tipo

$$p = x \in \mathbb{R} \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R},$$

dove $a_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$, e $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che in particolare sono polinomi le funzioni costanti, la funzione identità di $\mathbb{R}$, la funzione potenza n-esima, le funzioni lineari e le funzioni affini.

Il più grande n per cui $a_n \neq 0$ si dice *grado* del polinomio.

Il coefficiente a_0, cioè il coefficiente del termine di grado 0 si chiama anche *termine noto*.

Un numero reale $\bar{x}$ si dice *zero* del polinomio p se il valore di p in $\bar{x}$ è 0, cioè se

$$a_n \bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{x} + a_0 = 0;$$

in questo caso $\bar{x}$ viene anche detto *radice dell'equazione* $p(x) = 0$.

Osserviamo che possiamo moltiplicare due polinomi p e q e ottenere ancora un polinomio, che indichiamo con il simbolo pq.

Ad esempio se $p(x) = x^2-2$ e $q(x) = -2x^3+x$ allora, applicando la proprietà distributiva a associativa,

$$pq(x) = p(x) \cdot q(x) = (x^2-2)(-2x^3+x) = -2x^5 + 5x^3 - 2x.$$

Osserviamo che il grado del polinomio prodotto pq è uguale alla somma dei gradi dei polinomi p e q.

Divisione tra polinomi

Si può dimostrare che assegnati due polinomi p e d, ne esistono altri due q e r tali che

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x),$$

con il grado di r minore di quello di d oppure $r(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (*polinomio nullo*). Il polinomio q è detto *quoziente della divisione tra p e d* mentre r viene chiamato *polinomio resto*.

Osserviamo che se il grado di p è minore di quello di d si prende come q il polinomio nullo e come resto r lo stesso polinomio p.

Se il resto della divisione tra p e d è il polinomio nullo allora si dice, in perfetta analogia con la divisione fra numeri naturali, che *p è divisibile per d* o che *d è un divisore di p.*

L'algoritmo della divisione, cioè la procedura che occorre seguire per determinare i polinomi quoziente e resto, è sinteticamente illustrato qui di seguito (ci si riferisce ovviamente al caso in cui il grado di p e maggiore o uguale del grado di d):

1. mettere in ordine di grado (dal più alto al più basso) i termini di ciascuno dei due polinomi p e d e se in essi non è presente il termine di un certo grado, aggiungere un termine di tale grado avente come coefficiente 0;
2. dividere il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore;
3. scrivere il risultato ottenuto (si tratta di un monomio) al posto "classico" del quoziente specificando il segno;
4. moltiplicare tale monomio per il divisore e scrivere il risultato con il segno cambiato sotto il dividendo in maniera tale da incolonnare i termini simili;
5. sommare questi polinomi: il risultato ottenuto è il nuovo dividendo;
6. continuare col procedimento fino a quando il grado del dividendo è minore del grado del divisore, ottenendo così un polinomio quoziente e un resto.

Fattorizzazione di polinomi

Un polinomio si dice *riducibile* o *fattorizzabile* se esistono due polinomi q e d tali che $p(x) = q(x)d(x)$. Se p non è riducibile si dice che è *primo* o *irriducibile.*

Enunciamo, senza dimostrarli, i seguenti teoremi:

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ un polinomio di grado n, allora

- se $\bar{x}$ è uno zero di p allora esiste un polinomio q tale che
$$p(x) = (x - \bar{x})q(x);$$
- se $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ sono m zeri di p allora esiste un polinomio q tale che
$$p(x) = (x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)\ldots(x - \bar{x}_m)q(x);$$
- p non può avere più di n zeri distinti;
- se $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ sono n zeri distinti di p, allora
$$p(x) = a_n(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)\ldots(x - \bar{x}_n);$$

Si dice che $\bar{x}$ è uno zero di molteplicità k per p se esiste un polinomio q tale $p(x) = (x - \bar{x})^k q(x)$.

Non ci sono però regole generali per fattorizzare un polinomio in quanto, per polinomi di grado maggiore di 4, non esiste un algoritmo per il calcolo esatto delle radici.

In particolari casi si riesce a determinare alcune radici. Ad esempio:

a. se la somma dei coefficienti del polinomio è 0, allora 1 è radice;

b. se la somma dei coefficienti dei termini di grado pari meno la somma dei coefficienti dei termini di grado dispari è 0, allora -1 è radice;

c. detti $c_1, ..., c_l$ i divisori primi del coefficiente del termine di grado più alto e $b_1, ..., b_m$ i divisori primi del termine noto, si possono cercare le radici tra tutti i numeri del tipo
$$\alpha_{ij} = \pm \frac{b_i}{c_j}.$$

Una regola di fattorizzazione, di portata comunque limitata, è la *Regola di Ruffini*. Passiamo ad illustrarla con un esempio.

Supponiamo di voler scomporre
$$-4 + x^3 - 2x.$$

1. mettiamo in ordine i termini del polinomio rispetto al grado di x (dal grado più alto al più basso)
$$x^3 - 2x - 4;$$

2. detti $c_1, ..., c_l$ i divisori primi del coefficiente del termine di grado più alto e $b_1, ..., b_m$ i divisori primi del termine noto, consideriamo tutti i numeri del tipo
$$\alpha_{ij} = \pm \frac{b_i}{c_j}.$$
Nel nostro caso gli c_j si riducono al solo
$$1$$
ed i b_i sono
$$1 \;\; 2 \;\; 4$$
e quindi, considerando tutte le possibili combinazioni, gli α_{ij} sono
$$+1 \quad -1 \quad +2 \quad -2 \quad +4 \quad -4;$$

3. valutiamo[4] il polinomio in ciascuno dei numeri α_{ij} ottenuti al passaggio precedente. Se per ogni α_{ij}, $p(\alpha_{ij}) \neq 0$ e non si individua in altro modo

[4]Valutare il polinomio in un numero a significa calcolare $p(a)$.

uno zero del polinomio, non possiamo procedere ulteriormente. Se invece, come nel nostro caso

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 4 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) - 4 \neq 0$$

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 0,$$

esiste α_{ij} per cui $p(\alpha_{ij}) = 0$, continuiamo il procedimento come indicato in seguito;

4. riportiamo i coefficienti del polinomio in una tabella conservando l'ordine e scrivendo *zero* come coefficiente del termine di grado 2 che non è presente

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

5. scriviamo il numero α_{ij}, determinato al punto 3, in basso al di sopra della linea orizzontale e a sinistra della linea vertricale

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

6. riscriviamo in basso, incolonnato con il primo coefficiente e al di sotto della linea orizzontale, un numero uguale al primo coefficiente

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

moltiplichiamo tale numero per 2 e scriviamo il risultato al di sopra della linea orizzontale, incolonnato con il secondo coefficiente

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & \boxed{0} & -2 & -4 \\ 2 & & \boxed{2} & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

7. sommiamo i due numeri evidenziati, scriviamo il risultato sotto

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

e partendo da questo numero ripetiamo il procedimento ...

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & & & \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & 0 \end{array}$$

8. i numeri ottenuti, evidenziati nel punto 7, sono i coefficienti di un polinomio di grado 2 (in generale di grado $n-1$). Possiamo quindi scrivere

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

8 Equazioni e disequazioni algebriche di II grado

Una *equazione algebrica di grado* n è un'equazione del tipo $p(x) = 0$ dove p è un polinomio di grado n. Una disequazione algebrica di grado n è una disequazione del tipo $p(x) \gtreqless 0$ dove p è un polinomio di grado n. È chiaro che determinare le soluzioni di un'equazione algebrica equivale a determinare gli zeri del polinomio p ad essa associato. Analogamente, determinare le soluzioni della disequazione $p(x) \lesseqgtr 0$ equivale a determinare gli $x \in \mathbb{R}$ nei quali il polinomio p assume valori maggiori di zero o, come si suole dire, equivale a determinare il *segno di* p. Ovviamente se conosciamo l'insieme P delle $x \in \mathbb{R}$ per cui $p(x) > 0$, allora conosciamo anche l'insieme delle x per cui $p(x) \leq 0$, ossia $\complement_{\mathbb{R}} P$.

Consideriamo l'equazione algebrica di II grado

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{9}$$

Il polinomio di secondo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ può essere riscritto così:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

dove abbiamo posto

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Da (10), deduciamo che:

1. se $\Delta > 0$ allora (9) ha due soluzioni reali distinte

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. se $\Delta = 0$ allora (9) ha due soluzioni reali coincidenti

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. Se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni reali.

Inoltre da (10) deduciamo subito anche il segno di p. Infatti se $\Delta < 0$, allora il segno di p coincide con quello di a, dato che la quantità tra parentesi tonde in (10) è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $\Delta = 0$, il segno di p coincide con quello di a ed esiste un solo valore di x per cui p è uguale a 0. Se $\Delta > 0$ allora il segno di p dipende da a e anche dal segno di $\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$. Infatti

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = (x - x_1)(x - x_2).$$

e quindi $\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ se $x > x_2$ o se $x < x_1$.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nelle seguenti tabelle:

$\mathbf{a > 0}$	$p > 0$	$p \geq 0$	$p < 0$	$p \leq 0$
$\Delta > 0$	$x < x_1$ o $x > x_2$	$x \leq x_1$ o $x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq x_1\ (= x_2)$	per ogni $x \in \mathbb{R}$	$\emptyset$	$x = x_1\ (= x_2)$
$\Delta < 0$	per ogni $x \in \mathbb{R}$	per ogni $x \in \mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\mathbf{a < 0}$	$p > 0$	$p \geq 0$	$p < 0$	$p \leq 0$
$\Delta > 0$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x < x_1$ o $x > x_2$	$x \leq x_1$ o $x \geq x_2$
$\Delta = 0$	$\emptyset$	$x = x_1\ (= x_2)$	$x \neq x_1\ (= x_2)$	per ogni $x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\emptyset$	$\emptyset$	per ogni $x \in \mathbb{R}$	per ogni $x \in \mathbb{R}$

Alcuni esercizi

E22. Risolvere

$$3x^2 - 2x - 1 > 0$$
$$-2x^2 + x + 6 > 0$$
$$3x^2 + 5x + 3 < 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 > 0$$
$$\begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \leq 0 \end{cases}$$
$$(x^2 - x - 6)(-x^2 + 12x - 35) < 0$$

9 Equazioni e disequazioni razionali fratte

Un'equazione *razionale fratta* è un'equazione che si può ricondurre alla forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0, \tag{11}$$

dove p e q sono polinomi. Poiché la funzione $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}_q$, dove $\mathcal{Z}_q$ è l'insieme delle radici di q, le soluzioni di (11) sono gli zeri del polinomio p che appartengono a $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}_q$. Più in generale un'equazione del tipo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

si risolve studiando

$$f(x) = 0 \tag{12}$$

sull'insieme di definizione della funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Una disequazione razionale fratta è una disequazione che può essere posta nella forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} \gtreqless 0.$$

Un modo per risolverla è il seguente:

- scomporre, se possibile, p e q in fattori $p_1...p_m$ e $q_1...q_k$;
- studiare il segno di ciascun fattore in modo da ottenere (usando uno schema grafico se lo si ritiene utile) il segno di $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Alcuni esercizi

E23. Risolvere

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{5x^2 - x} < 0$$

$$\frac{4}{x+2} > 3 - \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{(x^2-5)(x^2-12)}{x(x^2-8x+5)} > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} < \dfrac{x}{x-1} \\ x(x^2+1) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{3x^2-1}}{\sqrt{2x+1}} > 1$$

$$\frac{\sqrt[3]{(3-x)x} - x}{\sqrt{4x^2-1} - x} < 0$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 1$$

10 Funzioni esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito, nella sezione 6, la funzione potenza con esponente reale α, in cui la variabile x compare come base della potenza mentre l'esponente è fisso. Ora invece costruiamo una nuova funzione fissando la base e facendo variare l'esponente. Sia dunque $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Si chiama *esponenziale di base* a la funzione:

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x \in \mathbb{R}$$

Nelle figure 18 e 19 è tracciato il grafico di tale funzione a seconda che sia $a > 1$ oppure $0 < a < 1$.

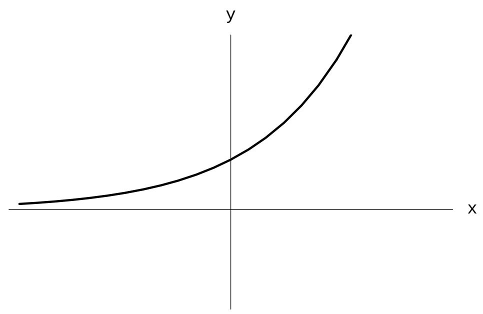

Figura 18: $y = a^x$, con $a > 1$

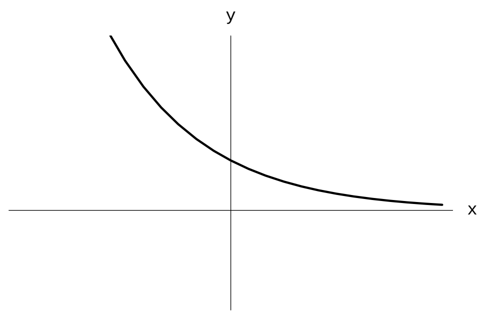

Figura 19: $y = a^x$, con $0 < a < 1$

Osserviamo che il dominio di tale funzione è $\mathbb{R}$, mentre la sua immagine è $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Osserviamo inoltre che è una funzione iniettiva e che

se $a > 1$	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
se $0 < a < 1$	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

cioè se $a > 1$ è una funzione strettamente crescente, mentre se $0 < a < 1$ è una funzione *strettamente decrescente.*

Per motivi che saranno più chiari dopo il corso di Analisi Matematica, particolare importanza riveste la funzione esponenziale di base e, tanto che in tal caso si parla di *funzione esponenziale* senza aggiungere "di base e". Il numero e è un numero irrazionale *trascendente* (cioè non è radice di alcun polinomio a coefficienti in $\mathbb{Q}$) compreso tra 2 e 3.

Poiché la funzione esponenziale di base a, $a \neq 1$, è iniettiva, fissato $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ esiste uno ed un solo $c \in \mathbb{R}$ tale che $a^c = b$. Tale numero c viene detto *logaritmo in base a di b* e si indica con $\log_a b$; b viene detto *argomento del logaritmo.* Vale la pena rimarcare ancora che sia la base a che l'argomento b appartengono a $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, invece $\log_a b$ può essere un numero negativo; ad esempio $\log_{1/2} 2 = -1$.

Dalle proprietà delle potenze, derivano le seguenti proprietà dei logaritmi:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b,$$

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a},$$

dove $a, d \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$, $b, c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poiché comunque si scelga $b \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un solo $c \in \mathbb{R}$ tale che $a^c = b$, resta definita la funzione

$$x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longmapsto \log_a x \in \mathbb{R},$$

con $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Tale funzione prende il nome di *funzione logaritmo di base a.* Per il modo in cui è stato definito $\log_a b$, è chiaro che la funzione logaritmo di base a è l'inversa della funzione esponenziale di base a. Valgono quindi le seguenti relazioni:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \qquad \log_a(a^x) = x, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

da cui segue anche

$$a^b = c^{\log_c (a^b)} = c^{b \log_c a}, \text{ per ogni } a > 0,\ c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\},\ b \in \mathbb{R}.$$

Riportiamo nelle figure 20 e 21 il grafico della funzione logaritmo di base a, distinguendo i casi $0 < a < 1$ e $a > 1$.

Osserviamo che se $a > 1$ la funzione logaritmo è strettamente crescente, mentre se $0 < a < 1$ è strettamente decrescente. Dunque

se $a > 1$	$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$
se $0 < a < 1$	$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

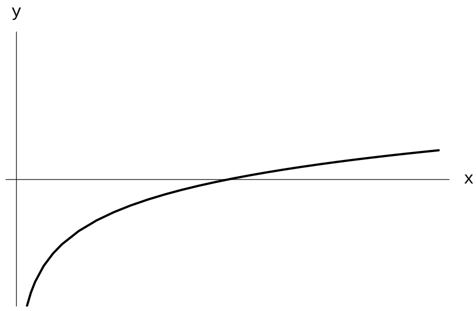

Figura 20: $y = \log_a x$, $a > 1$

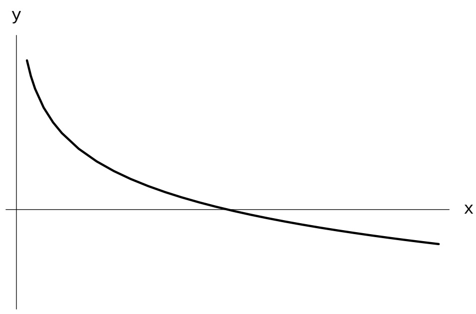

Figura 21: $y = \log_a x$, $0 < a < 1$

Anche nel caso della funzione logaritmo, se la base è uguale ad e generalmente non si specifica "di base e" e si scrive semplicemente $\log x$. Un'altra base che generalmente si sottintende, scrivendo Log$x$, è la base 10.

Dall'iniettività e dall'essere le funzioni esponenziali e logaritmiche strettamente crescenti oppure strettamente decrescenti seguono le seguenti proprietà, essenziali per lo studio di equazioni e disequazioni:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \log_a b & \text{se} \quad b > 0 \\ \text{mai} & \text{se} \quad b \leq 0 \end{cases}$$

$$a^{f(x)} < b$$

$$\Updownarrow$$

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$b > 0$	x tali che $f(x) > \log_a b$	x tali che $f(x) < \log_a b$
$b \leq 0$	$\emptyset$	$\emptyset$

$$a^{f(x)} > b$$

$$\Updownarrow$$

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$b > 0$	x tali che $f(x) < \log_a b$	x tali che $f(x) > \log_a b$
$b \leq 0$	per ogni x nel dominio di f	per ogni x nel dominio di f

$$\log_a (f(x)) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a (f(x)) > b$$

$$\Updownarrow$$

$0 < a < 1$	$a > 1$
x tali che $0 < f(x) < a^b$	x tali che $f(x) > a^b$

$$\log_a (f(x)) < b$$

$$\Updownarrow$$

$0 < a < 1$	$a > 1$
x tali che $f(x) > a^b$	x tali che $0 < f(x) < a^b$

Alcuni esercizi

E24. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
&\log_a a = 1\\
&\log_5 x = 2\\
&\log_5 x = -5\\
&10^x = 1\\
&5^x = 2\\
&4^x + 2^{x+2} = 5\\
&7^{x+1} + 7^{x-1} = 5^x
\end{aligned}$$

E25. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\begin{aligned}
&\log_5 x > -2\\
&5^x > 2\\
&3^x > -2\\
&2^x < -1\\
&\log(x^4 - 4x^2 + 5) \geq \log(x^2 + 1)\\
&\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 1\\
&\frac{1}{3}^{(1-12x)x} < 3\\
&8^{x+1} \geq 2^{x^2}\\
&e^{|x-1|} < e^x\\
&4^x + 2^x - 2 < 0\\
&e^x + e^{-x} < 2\\
&(x+1)^{x^2-1} > 1\\
&\log_{x-2}(2x^2 - 13x + 21) > 0\\
&\sqrt{\log_3(x^2-1)} > \sqrt{\log_3(2x+1)}\\
&1 + \sqrt{2\log^2 x + 3\log x - 2} > \log x
\end{aligned}$$

11 Funzioni trigonometriche

Definiamo la misura di un angolo piano in *radianti.* Consideriamo una circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice dell'angolo che vogliamo misurare (tale circonferenza viene chiamata *circonferenza goniometrica*). L'ampiezza in radianti è data dalla lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dallo stesso angolo.

Con π si denota la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1. Dunque in radianti un angolo piatto misura π, un angolo retto $\frac{\pi}{2}$, un angolo giro 2π, un angolo di 60 gradi $\frac{\pi}{3}$, ... Notiamo che π, così come tutte le altre misure di angoli in radianti, è un numero reale.

Analogamente a quanto si fa per l'ascissa di una retta si definisce un'origine, cioè un angolo nullo, e un verso di rotazione positivo (usualmente il verso antiorario) e si considerano anche angoli maggiori di 2π radianti, corrispondenti ad angoli maggiori di un angolo giro, e minori di 0, corrispondenti ad angoli misurati nel verso negativo. Così l'angolo di ampiezza θ radianti corrisponde geometricamente all'angolo di ampiezza $\theta + 2\pi$ e all'angolo $\theta + 4\pi$ o all'angolo $\theta - 2\pi$ e così via.

Ad ogni numero reale x si può far corrispondere un unico numero $n \in \mathbb{Z}$ e un unico angolo di ampiezza $\theta \in [0, 2\pi]$ nel modo seguente. Se $x = 0$ si prende $n = 0$ e $\theta = 0$. Se $x > 0$, n è il più grande intero positivo minore o uguale a $\frac{x}{2\pi}$ e θ è uguale a $x - 2n\pi$. Se $x < 0$, detto m il più grande intero positivo minore o uguale a $\frac{-x}{2\pi}$ e preso $\theta' = -x - 2m\pi$, poniamo $n = -m - 1$ e $\theta = 2\pi - \theta'$. Pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$x = 2n\pi + \theta, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{13}$$

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy e la circonferenza di raggio 1 e centro O. Convieniamo di fissare come angolo nullo quello formato dal semiasse positivo delle x con se stesso. Preso un angolo di ampiezza $\theta \in [0, 2\pi]$ si definiscono i numeri $\sin\theta$ e $\cos\theta$ come le coordinate del punto P che si trova sulla circonferenza e sulla semiretta uscente da O e che forma con il semiasse positivo delle x l'angolo di ampiezza considerato (cf. figura 22).

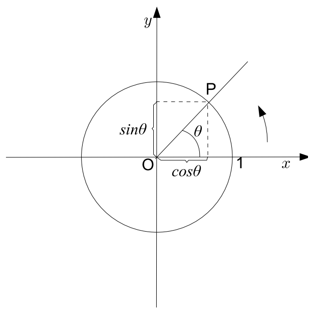

Figura 22: La *circonferenza goniometrica*

Restano quindi definite le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x \qquad \text{e} \qquad x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x,$$

ponendo $\sin x = \sin\theta$ e $\cos x = \cos\theta$, dove $\theta \in [0, 2\pi]$ è l'angolo associato ad x nella (13). Esse assumono valori nell'intervallo $[-1, 1]$. Nelle figure 23 e 24 sono disegnate parti dei loro grafici.

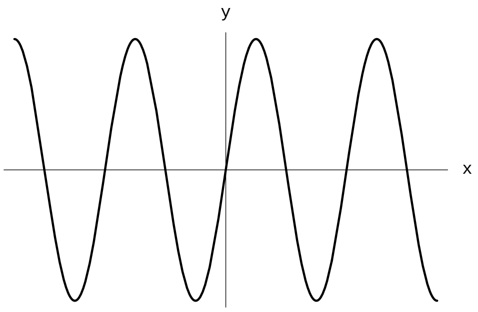

Figura 23: $y = \sin x$

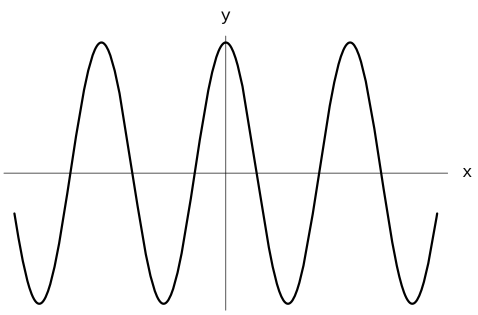

Figura 24: $y = \cos x$

Fra le loro proprietà ricordiamo innanzi tutto:

$$\begin{aligned}
&\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};\\
&\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};\\
&\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};\\
&\sin x = \sin(x + 2n\pi), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e per ogni } n \in \mathbb{Z};\\
&\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};\\
&\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};\\
&\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\\
&\cos x = \cos(x + 2n\pi), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e per ogni } n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Fra le varie relazioni esistenti tra queste due funzioni, la più importante è quella che segue dal teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli. Applicandolo al triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio della circonferenza (avente misura 1) e per cateti i segmenti che congiungono il punto P, sopra definito, con le sue proiezioni ortogonali sugli assi (aventi quindi misura $|\sin x|$ e $|\cos x|$) si ottiene

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sono anche importanti le seguenti relazioni

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1 \qquad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \tag{14}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \cos x_2 \qquad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Se nelle relazioni (14) e (15) poniamo $x_1 = x_2 = x$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}$$

Osserviamo anche che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ non sono iniettive . Se restringiamo l'insieme di definizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ otteniamo invece una funzione iniettiva (strettamente crescente), quindi invertibile tra $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $[-1, 1]$. L'inversa di questa funzione si chiama *determinazione principale dell'arcoseno* o brevemente *arcoseno* e si indica con $\arcsin x$. Dunque

$$\arcsin \colon [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

ed il suo grafico è in figura 25.

Analogamente se restringiamo l'insieme di definizione della funzione $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$, otteniamo una funzione iniettiva (strettamente decrescente) quindi invertibile tra $[0, \pi]$ e $[-1, 1]$. L'inversa di questa funzione si chiama

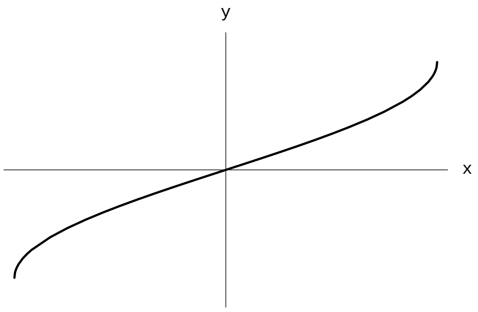

Figura 25: $y = \arcsin x$

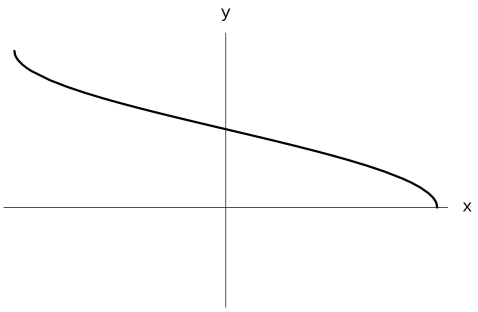

Figura 26: $y = \arccos x$

determinazione principale dell'arcocoseno o brevemente *arcocoseno* e si indica con $\arccos x$. Dunque

$$\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

ed il suo grafico è in figura 26. A partire dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si definisce la funzione *tangente*:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\colon n \in Z\} \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \in \mathbb{R}.$$

Questa funzione è definita in $\mathbb{R}$ tranne gli $x \in \mathbb{R}$ per cui $\cos x = 0$ e cioè $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con $n \in Z$. Usando le proprietà dei triangoli simili si vede che $\tan x$ rappresenta l'ordinata del punto Q, intersezione tra la retta individuata dall'angolo x e la tangente alla circonferenza passante per il punto di coordinate $(1,0)$. In figura 27 è disegnato una parte del grafico della funzione tangente. Osserviamo che essa non è iniettiva ed ha come immagine $\mathbb{R}$. Se restringiamo il

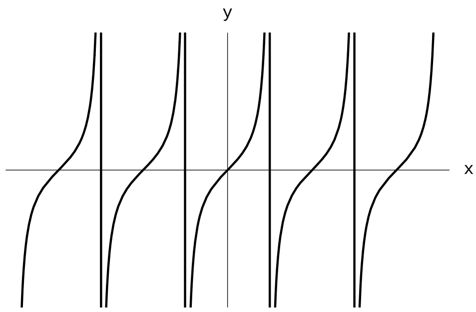

Figura 27: $y = \tan x$

suo insieme di definizione all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ otteniamo una funzione iniettiva (strettamente crescente) dunque invertibile tra $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$. L'inversa di tale funzione si chiama funzione *arcotangente* e si indica con $\arctan x$. Dunque

$$\arctan\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

ed il suo grafico è in figura 28.

Alcuni esercizi

E26. Discutere la disequazione

$$\sin x > a,$$

distinguendo i casi $a \geq 1, -1 \leq a < 1, a < -1$.

E27. Discutere la disequazione

$$\cos x > a,$$

distinguendo i casi $a \geq 1, -1 \leq a < 1, a < -1$.

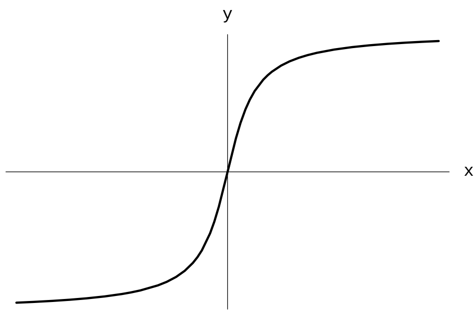

Figura 28: $y = \arctan x$

E28. Discutere la disequazione

$$\tan x > a,$$

con $a \in \mathbb{R}$.

E29. Risolvere

$$\tan x(1 - \sin x) > 0.$$

E30. Risolvere

$$\sqrt{1 - 2\sin^2 x} \geq \sqrt{2}\sin x + 1.$$

E31. Risolvere graficamente la disequazione

$$\cos x + 3\sin x < 1.$$